Dinamica: Forze e Moto, Leggi di Newton

- La *Dinamica* studia il moto dei corpi in relazione il moto con le sue cause: *perché* e *come* gli oggetti si muovono.

- La causa del moto è individuata nella presenza di interazioni fra corpi che si manifestano come *Forze*

- Il moto dei corpi è determinato dalle *Leggi di Newton*

Prima Legge di Newton

La prima legge di Newton descrive cosa succede *in assenza di interazioni*:

- Per un oggetto non interagente con altri oggetti, è sempre possibile identificare un sistema di riferimento, detto *inerziale*, nel quale l'oggetto ha accelerazione nulla.

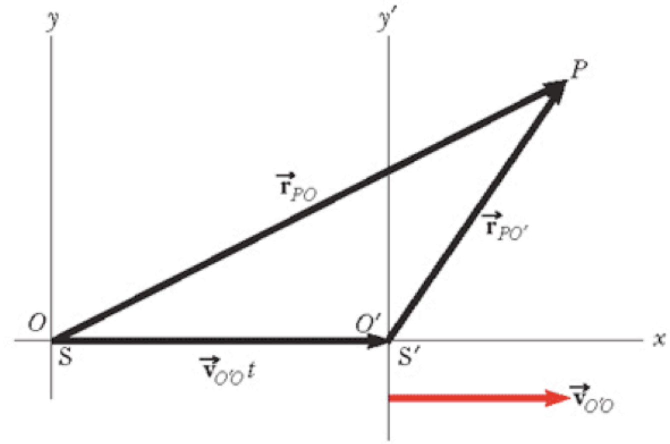
- In assenza di interazioni con l'esterno, un oggetto *permane nel suo stato di quiete o di moto a velocità costante*, se osservato da un sistema di riferimento inerziale

Nota anche come *Principio di Inerzia*.

Sistemi di riferimento inerziali

La prima Legge di Newton definisce i *sistemi di riferimento inerziali*.

- Qualunque sistema di riferimento che si muova con velocità costante relativamente ad un sistema di riferimento inerziale è pure un sistema inerziale (trasformazioni di Galilei)



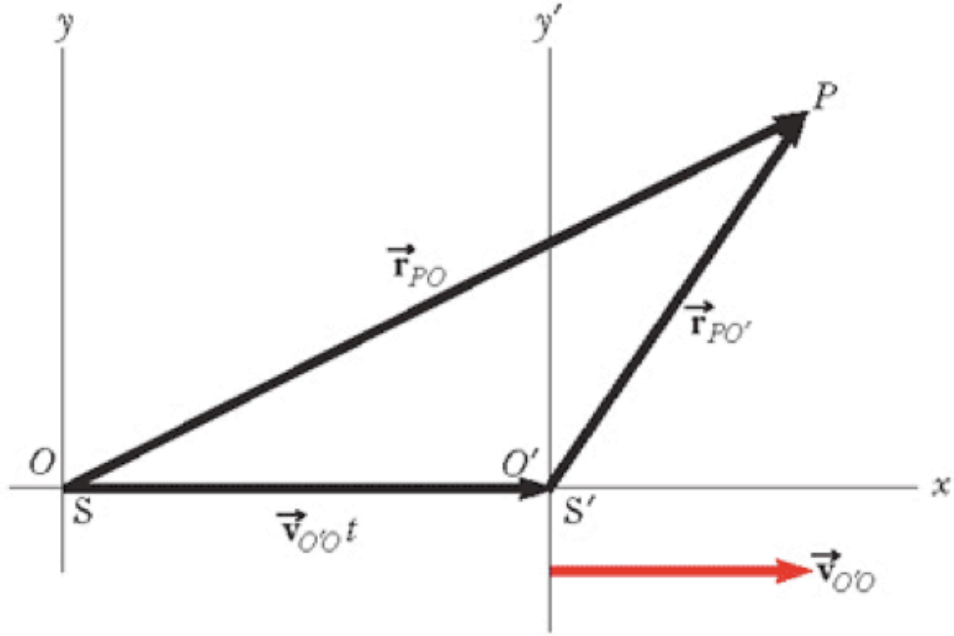
- Un sistema di riferimento che si muova con velocità costante relativamente alle stelle lontane può essere considerato con buona approssimazione inerziale

- Possiamo considerare la Terra un sistema inerziale, benché abbia una piccola accelerazione dovuta al suo moto

Trasformazioni di Galilei

- Il sistema di referimento $\mathcal{S}$ è *stazionario*

- Il sistema di referimento $\mathcal{S}'$ e' in movimento con velocità $\vec{v}_0$ *costante*



- Al tempo $t = 0$ le origini di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ coincidono. Vale: $\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t}$

- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0}$ (*trasformazione di Galileo)*

- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}'}$ perchè $\vec{v}_0$ è costante

Forze

- Lo stato "naturale" di moto degli oggetti è essere in quiete, oppure in moto rettilineo uniforme

- Sono le *Forze* che cambiano questo stato

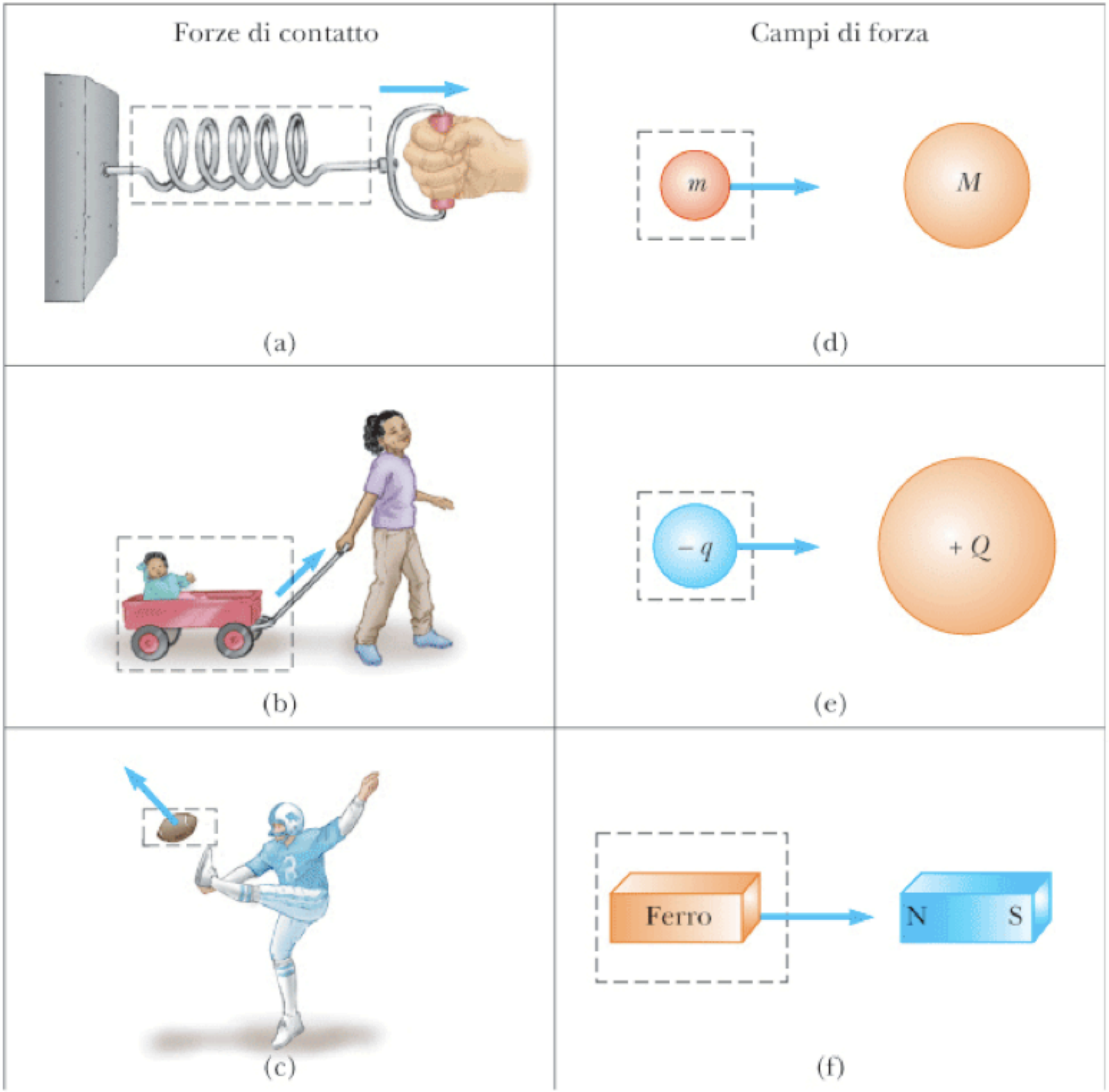
- Possiamo distinguere le Forze in

  – *Forze di contatto:* conseguenza del contatto fisico fra due oggetti
  – *Campi di forze*: agiscono tramite lo spazio, senza contatto fisico

  Notare che a livello microscopico, esistono solo campi di forze.

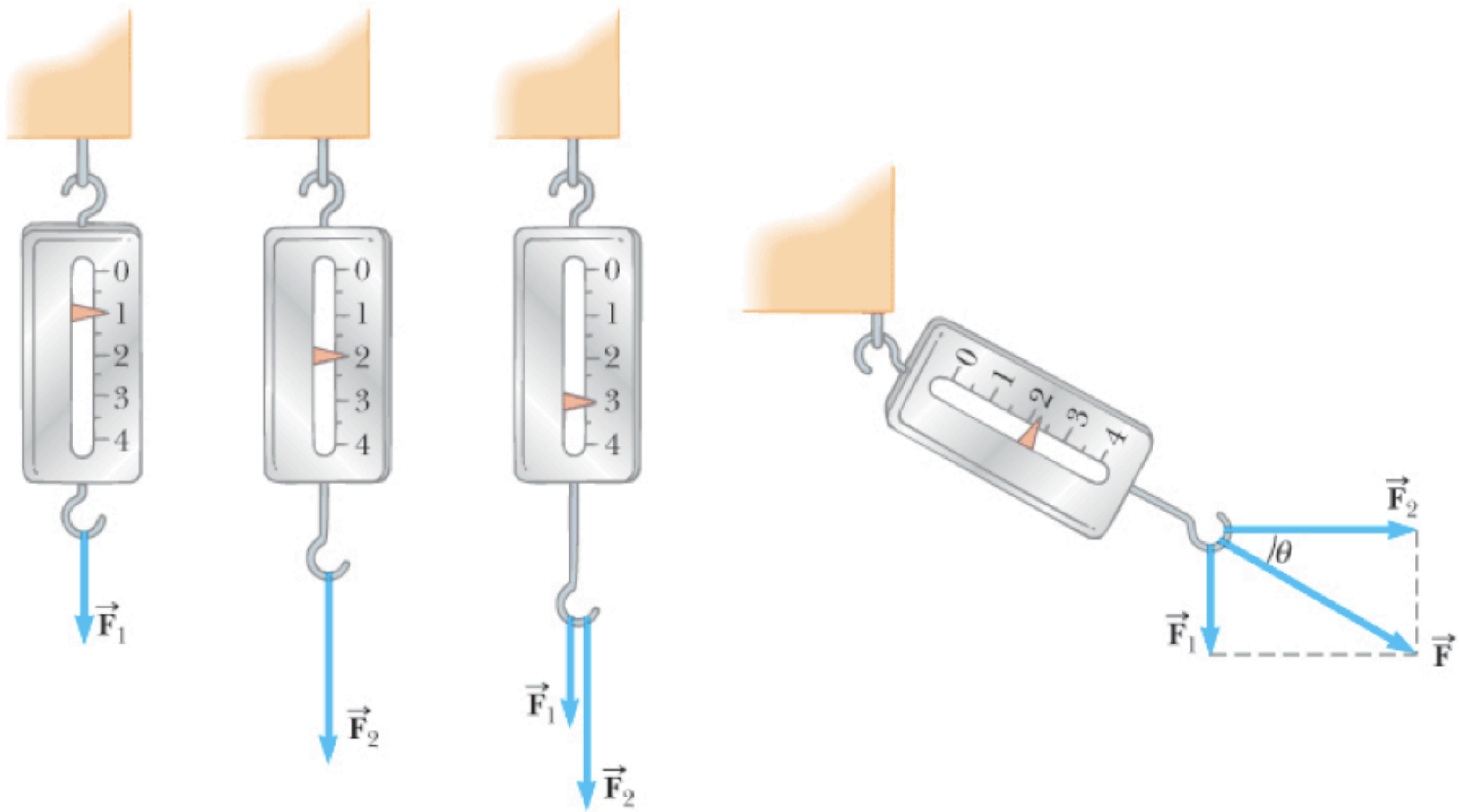
- Tipi di Forze: *peso, reazione vincolare, tensione, attrito, elastica,...*

Esempi di Forze



Misura delle Forze

- Si può usare una molla per calibrare la grandezza di una forza
- Le forze sono *vettori*: bisogna usare le regole per l'addizione di vettori per trovare la forza totale (detta *risultante*) agente su di un oggetto



Inerzia e Massa

- La tendenza di un oggetto a resistere a tentativi di cambiare la sua velocità è chiamata *inerzia*.

- La *Massa* è quella proprietà di un oggetto che specifica quanta resistenza un oggetto oppone ai cambiamenti della sua velocità

- La Massa è una proprietà *intrinseca* di un oggetto: non dipende da cosa circonda l'oggetto, né dal metodo usato per misurarla

- La Massa è una quantità *scalare*. L'unità SI per la Massa è il kg.

Seconda Legge di Newton

- L'accelerazione di un oggetto è *direttamente proporzionale alla forza totale* che agisce su di lui, *inversamente proporzionale alla sua massa*.
  - La forza è quindi la causa del *cambiamento* del moto, e questo è misurato dall'accelerazione
- Formulazione matematica: $\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$, dove $\sum$ indica sommatoria

  In componenti: $\sum F_x = ma_x$, $\sum F_y = ma_y$, $\sum F_z = ma_z$.
- Unità: kg·m/s^2, che nel sistema SI è chiamato newton (N).

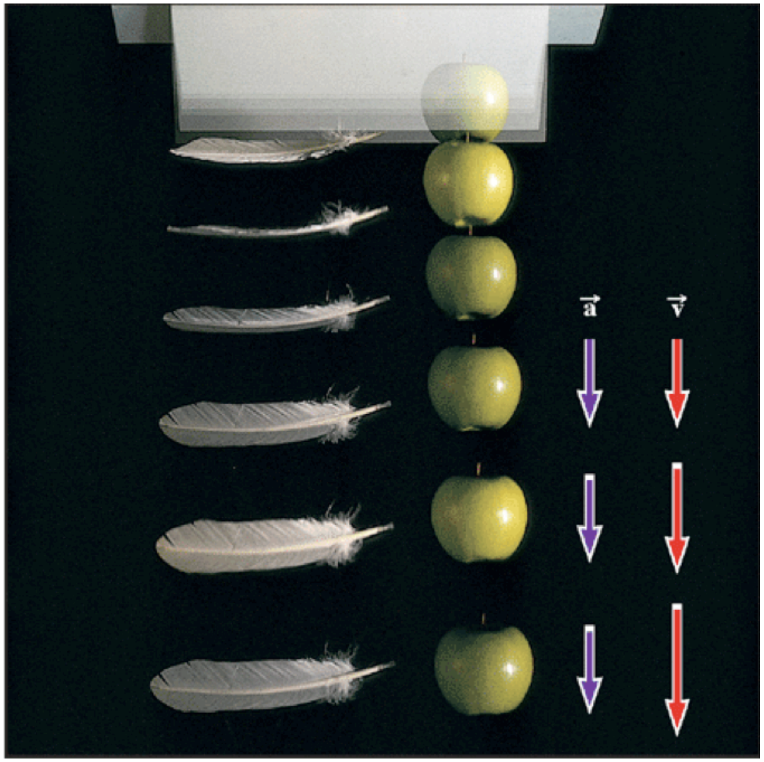
Forza peso

- La forza che chiamiamo *peso* è dovuta all'attrazione gravitazionale che la terra esercita su tutti i corpi

- Vicino alla superficie terrestre, un corpo di massa m risente di una forza peso $\vec{P}$ diretta verso il centro della terra:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

  NB: il peso di un corpo non è la sua massa!



L'accelerazione dovuta alla gravità è *indipendente dalla massa del corpo* (vedere la II Legge di Newton)

Massa e Peso

La Massa e il Peso sono due quantità differenti!

- Il Peso è uguale alla grandezza della forza gravitazionale esercitata su di un oggetto

- Il Peso varia da luogo a luogo

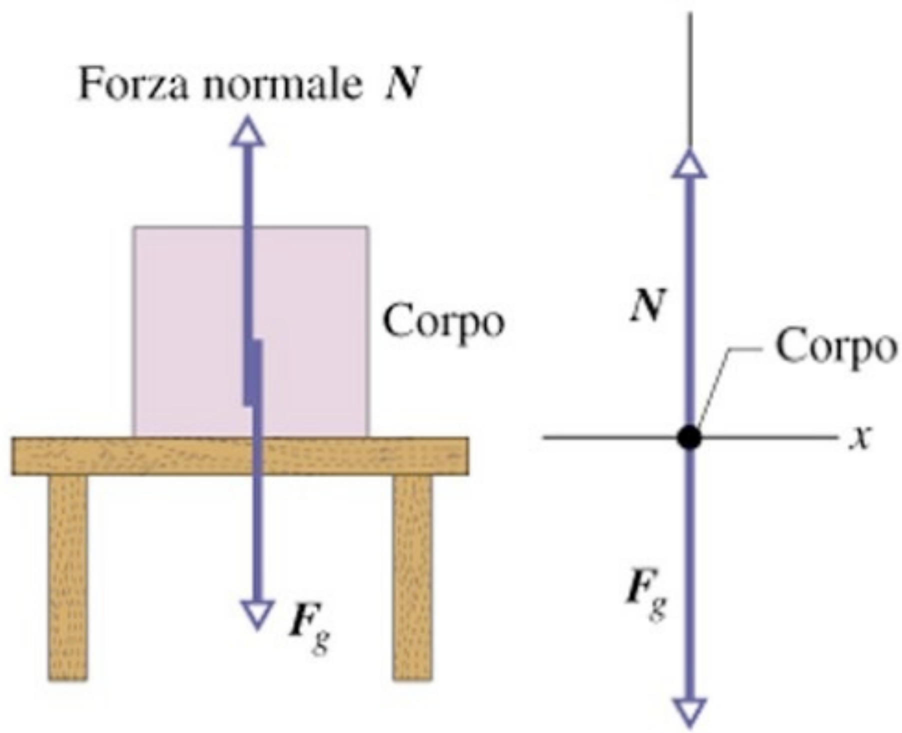
- La Massa di un oggetto è sempre la stessa dappertutto

- Massa *gravitazionale* = Massa *inerziale*
  (ovvero: la Massa che appare nell'espressione della forza di gravità è uguale alla Massa che appare nella seconda legge di Newton)

Forza normale (o reazione vincolare)

- Quando due corpi entrano a contatto essi esercitano l'uno sull'altro *forze di contatto*

- Se le superfici dei corpi sono prive di attrito, le forze di contatto sono dirette sempre *normalmente* (=perpendicolarmente) ad esse



Oggetti in Equilibrio

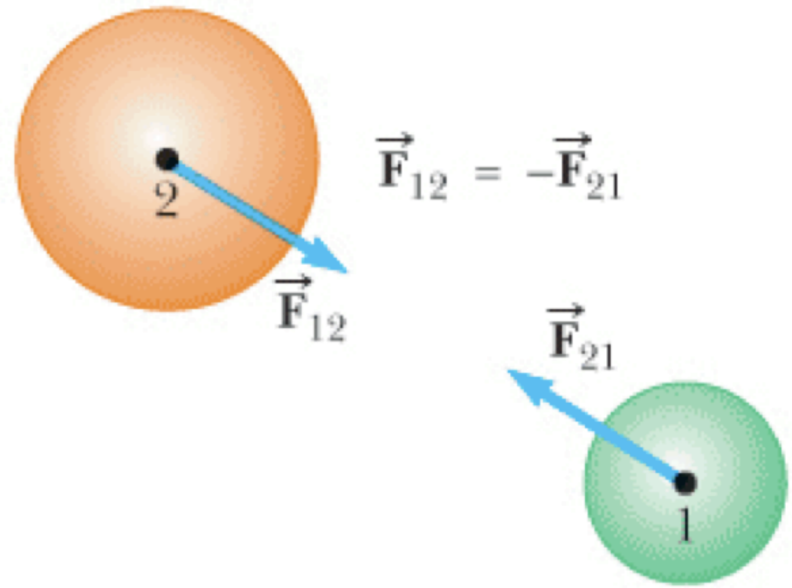
- Se l'accelerazione di un oggetto, modellizzato come una particella, o come punto materiale, è nulla, si dice che l'oggetto è *in equilibrio*.

- Matematicamente: la forza totale agente su di un oggetto in equilibrio è nulla, quindi
$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = 0$$
ovvero
$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z$$

- Siamo in presenza di un problema di *Statica*.

Terza Legge di Newton

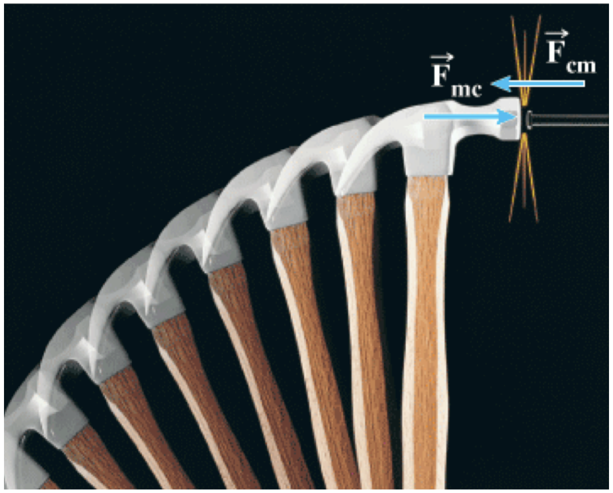
Se il corpo 1 esercita sul corpo 2 una forza $\vec{F}_{12}$, il corpo 2 esercita sul corpo 1 una forza di modulo e direzione uguale e verso opposto:



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ formano una *coppia di azione e reazione*. Il significato profondo della terza legge è che le forze sono dovute ad *interazioni fra i corpi*:
– Le forze sono sempre presenti a coppie
– Una forza singola isolata non può esistere
– Le forze di azione e di reazione agiscono su oggetti *differenti*

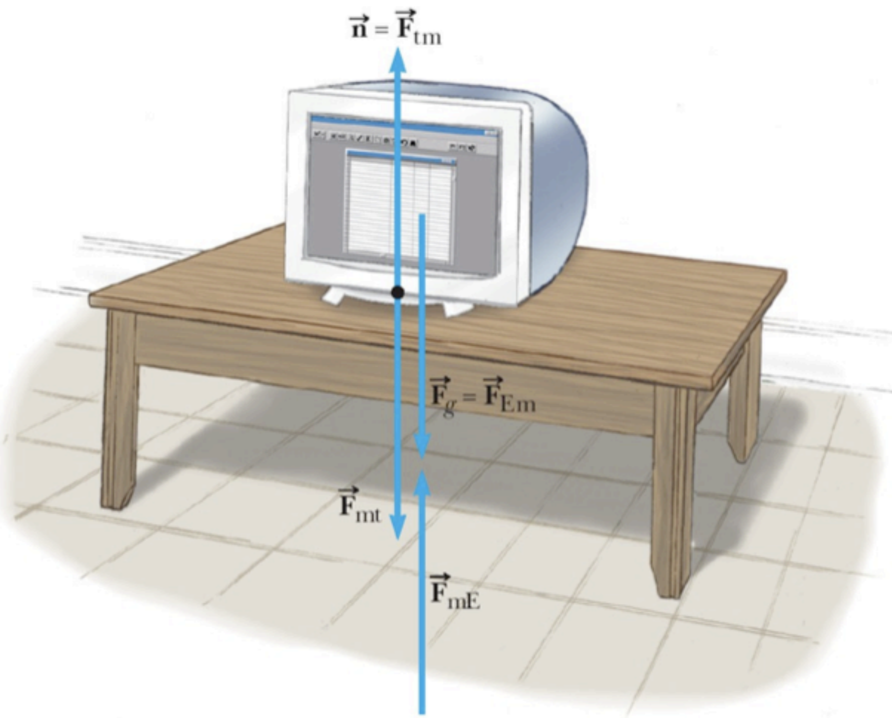
Esempio di coppie di Azione e Reazione



La forza che il martello esercita sul chiodo è uguale e contraria alla forza che il chiodo esercita sul martello; lo stesso vale per la forza che il chiodo esercita sul muro e viceversa

- La forza normale (tavola sul monitor) è la reazione alla forza che il monitor esercita sul tavolo

- La forza (di azione) che la Terra esercita sul monitor è uguale in grandezza e opposta in direzione alla forza (di reazione) che il monitor esercita sulla Terra)



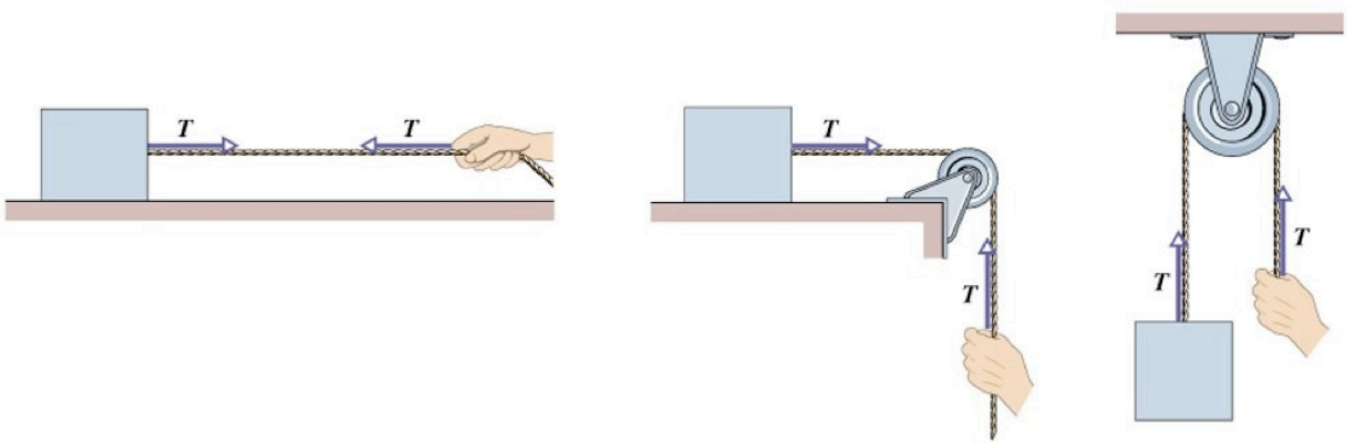
Applicazioni delle Leggi di Newton

Assunzioni:

- Gli oggetti possono essere modellizzati come particelle
- Fili e corde hanno comportamento ideale
- Consideriamo (per ora) superfici senza attrito

Fili e corde: Tensione

- Una corda tesa è in grado di trasmettere una forza al corpo al quale viene fissata: tale forza è detta *tensione*
- La tensione è sempre diretta come la corda ed è applicata al punto di attacco della corda stessa
- Una corda *ideale* ha massa trascurabile ed è *inestensibile*
- In una corda ideale, la tensione viene trasmessa inalterata da punto a punto della corda stessa

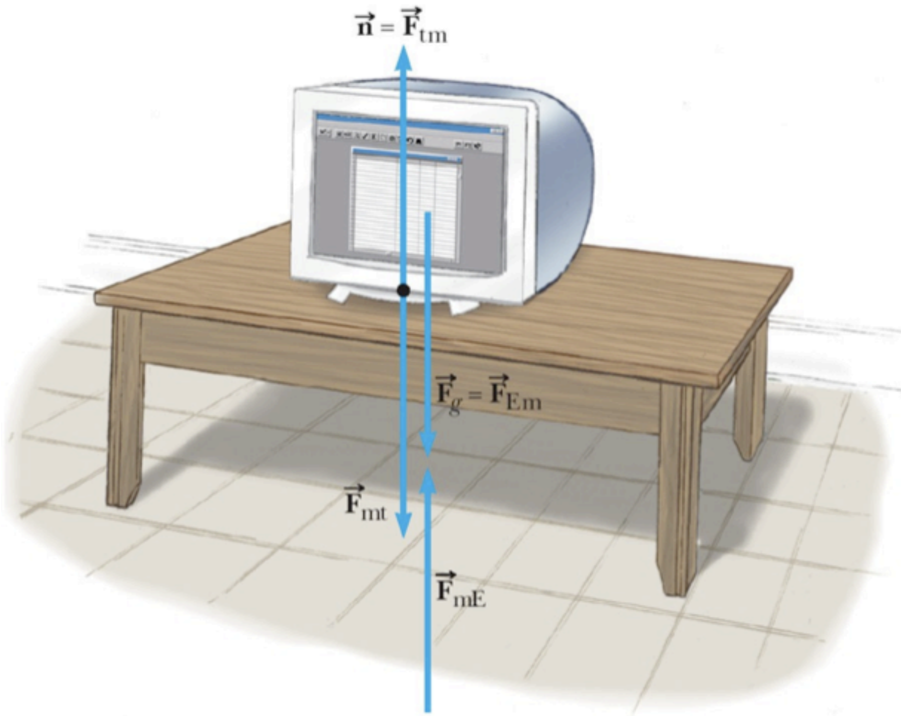


Come risolvere problemi di dinamica

- Schematizzare il problema – fare un diagramma
- Analizzare e classificare il problema:
  – Equilibrio ($\Sigma\vec{F} = 0$) o Seconda Legge di Newton ($\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$)?
- Disegnare *diagrammi di corpo libero* per ogni oggetto, *includendo tutte e sole le forze che agiscono su quell'oggetto*!
- Scegliere un sistema di coordinate appropriato;
  assicurarsi che le unità siano consistenti;
  applicare la o le equazioni appropriate in forma di componenti;
  risolvere per la o le incognite.
- Verificare la consistenza dei risultati con i diagrammi di corpo libero;
  verificare i casi limite.

Diagramma di Corpo Libero

In un diagramma di corpo libero, si raffigurano *solo le forze che agiscono su di un particolare oggetto*.

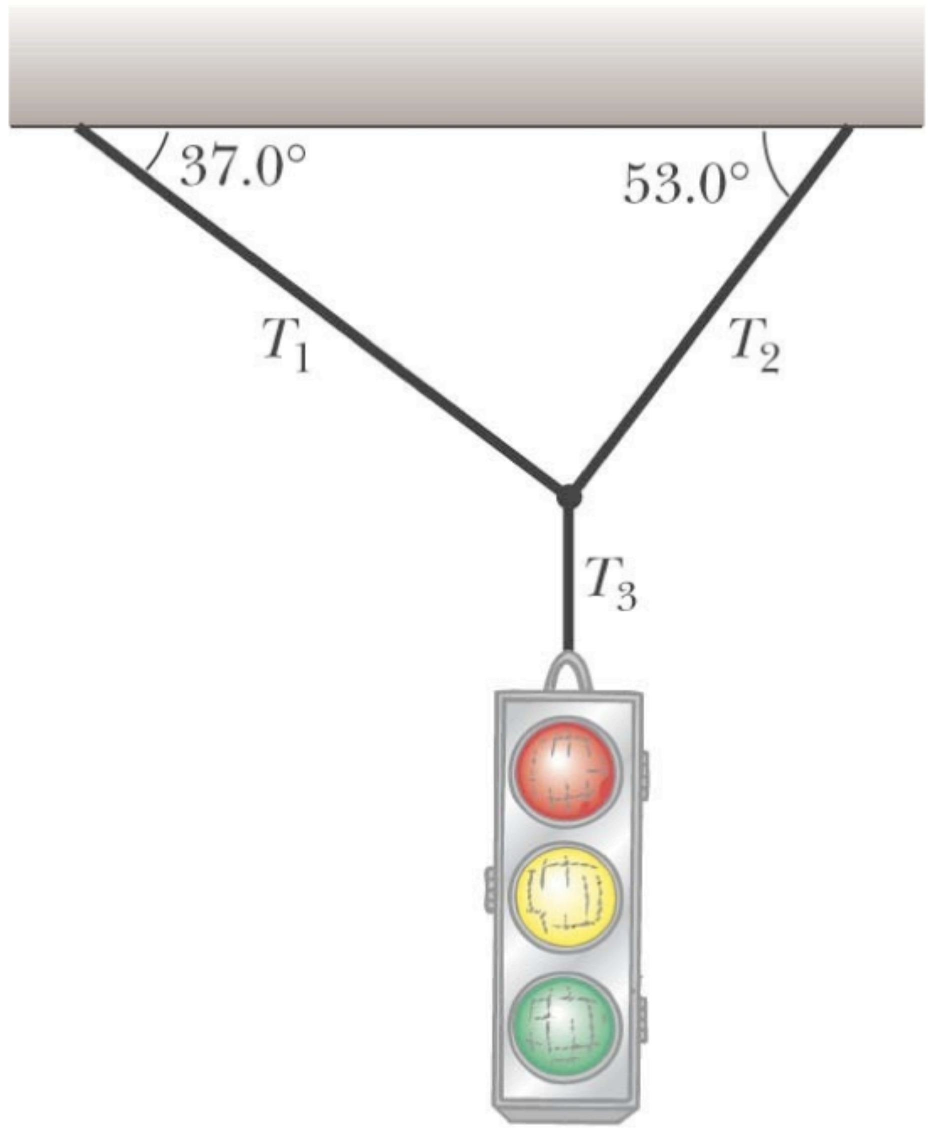


Esempio: la forza normale e la forza di gravità sono le *sole* forze che agiscono sul monitor. Tutte le altre forze in gioco agiscono su *altri oggetti*

Esercizio: equilibrio

Semaforo di peso 122N; i cavi 1 e 2 si rompono se la forza eccede 100N: si romperanno?

- Schematizziamo il semaforo
- Classifichiamo come problema di equilibrio (nessun moto, accelerazione nulla)
- Analizziamo il problema: servono due diagrammi di corpo libero, uno per il semaforo e uno per il nodo



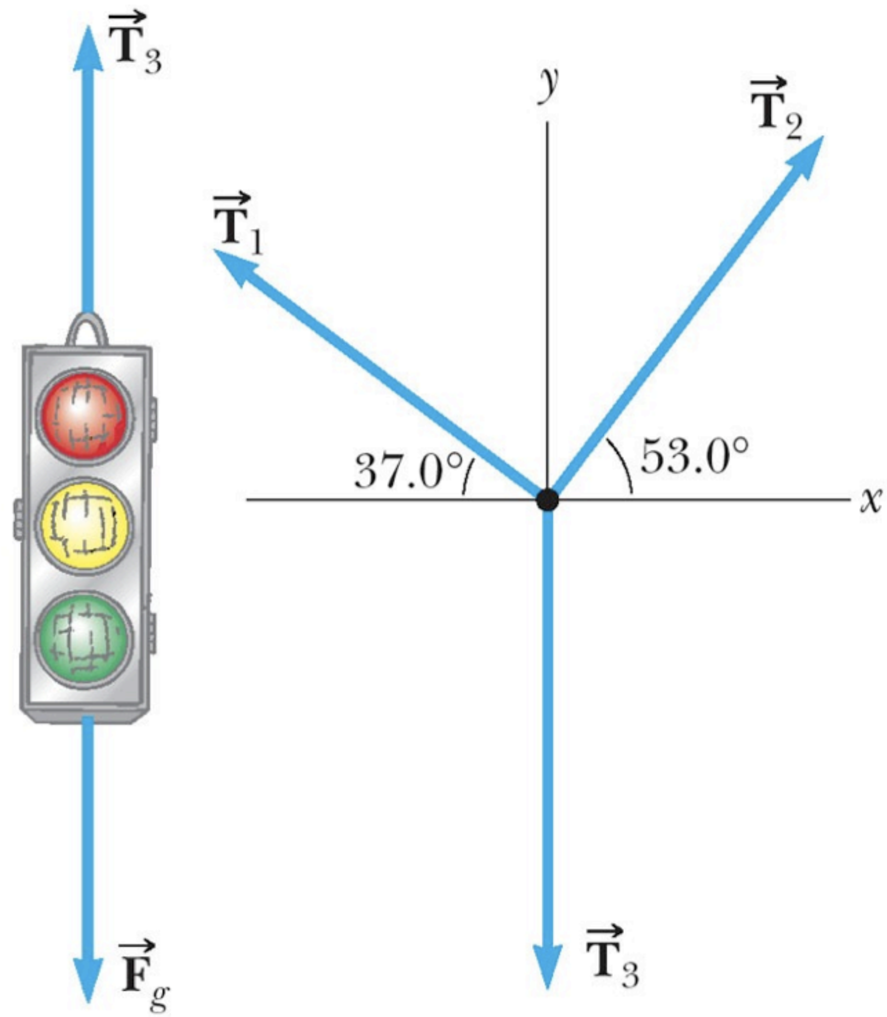
Esercizio: equilibrio (2)

- Equazione di equilibrio per il semaforo: $T_3 = F_g = 122$ N

- Applichiamo l'equazione di equilibrio: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$ al nodo, ovvero, in componenti:

$$-T_1 \cos(37°) + T_2 \cos(53°) = 0$$

$$T_1 \sin(37°) + T_2 \sin(53°) = T_3$$



- Risolviamo:

$T_2 = T_1 \dfrac{\cos(37°)}{\cos(53°} = 1.33 T_1$; $T_1 (\sin(37°) + 1.33 \sin(53°)) = 122$ N;
$T_1 = 73.4$ N, $T_2 = 97.4$ N

Oggetti sottoposti ad una forza totale non nulla

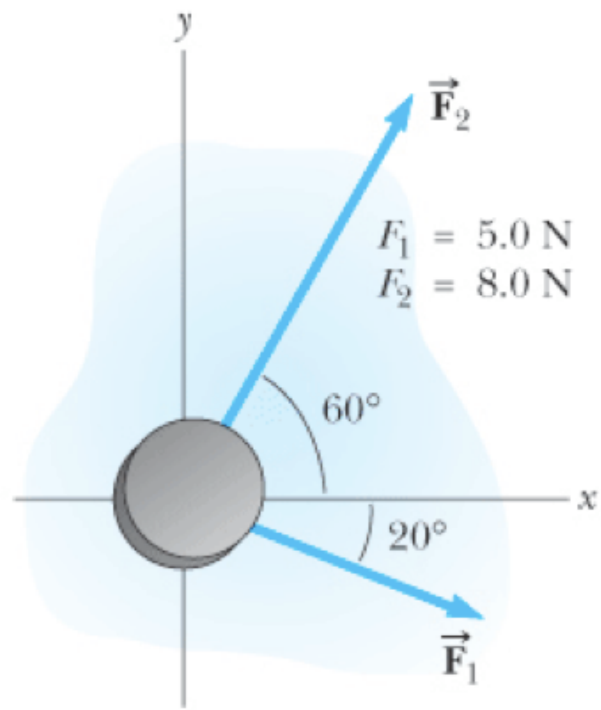
- Se un oggetto subisce un'accelerazione, ci deve essere una *forza totale non nulla* che agisce su di esso
- Disegnate un diagramma di corpo libero
- Applicate la Seconda Legge di Newton a tutte le componenti vettoriali

Disco di massa $m = 0.30$ *kg: accelerazione?*

$$a_x = \frac{F_{1x} + F_{2x}}{m} = 29 m/s^2$$

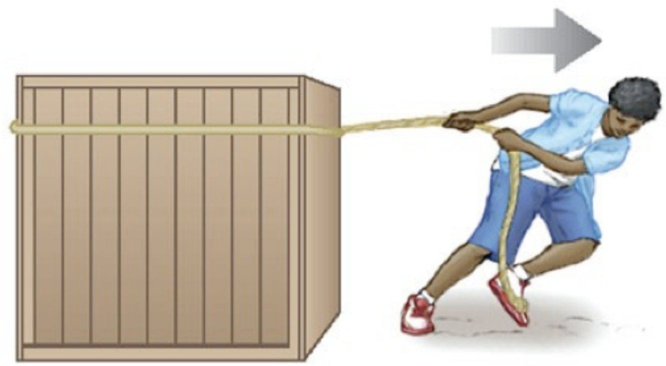
$$a_y = \frac{F_{1y} + F_{2y}}{m} = 17 m/s^2$$

$$|\vec{a}| = 34 m/s^2,\ \theta = \arctan\frac{a_y}{a_x} = 30^\circ$$



Esempio (senza attrito)

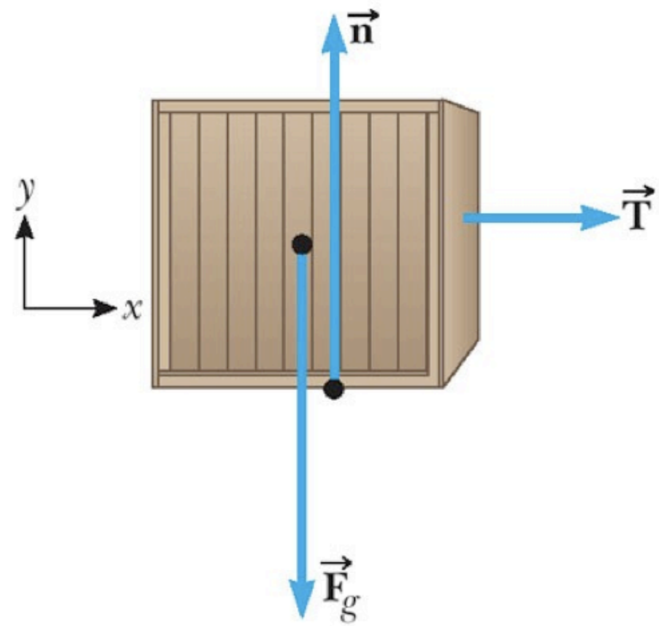
- Forze agenti sull'oggetto:
  - La tensione $\vec{T}$ della corda,
  - La forza gravitazionale, $\vec{F}_g$
  - La forza normale, $\vec{n}$, esercitata dal pavimento



- Applicare la seconda legge di Newton alle componenti, risolvere

$$\sum F_x = T = ma_x$$

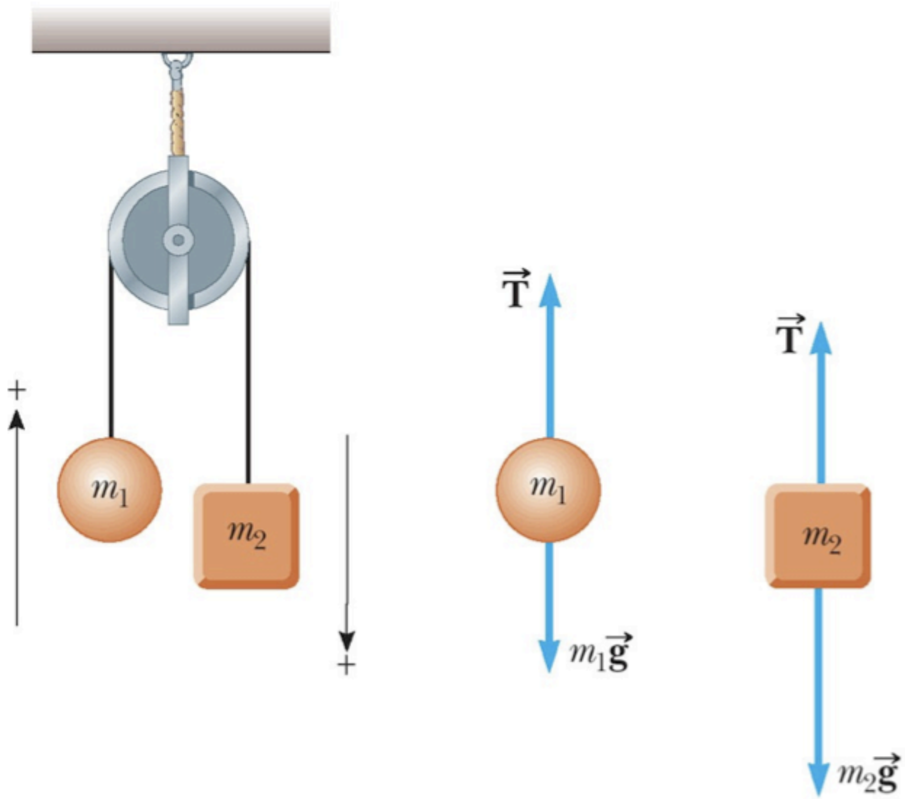
$$\sum F_y = n - F_g = 0 \rightarrow n = F_g$$



Se $\vec{T}$ è costante, anche $\vec{a}$ è costante e il moto è uniformemente accelerato

Esempio: macchina di Atwood

- Forze agenti sugli oggetti:
  - Tensione $\vec{T}$ (la stessa per i due oggetti: un solo filo)
  - Forza gravitazionale
- Ogni oggetto ha la stessa accelerazione in quanto connesso dal filo all'altro

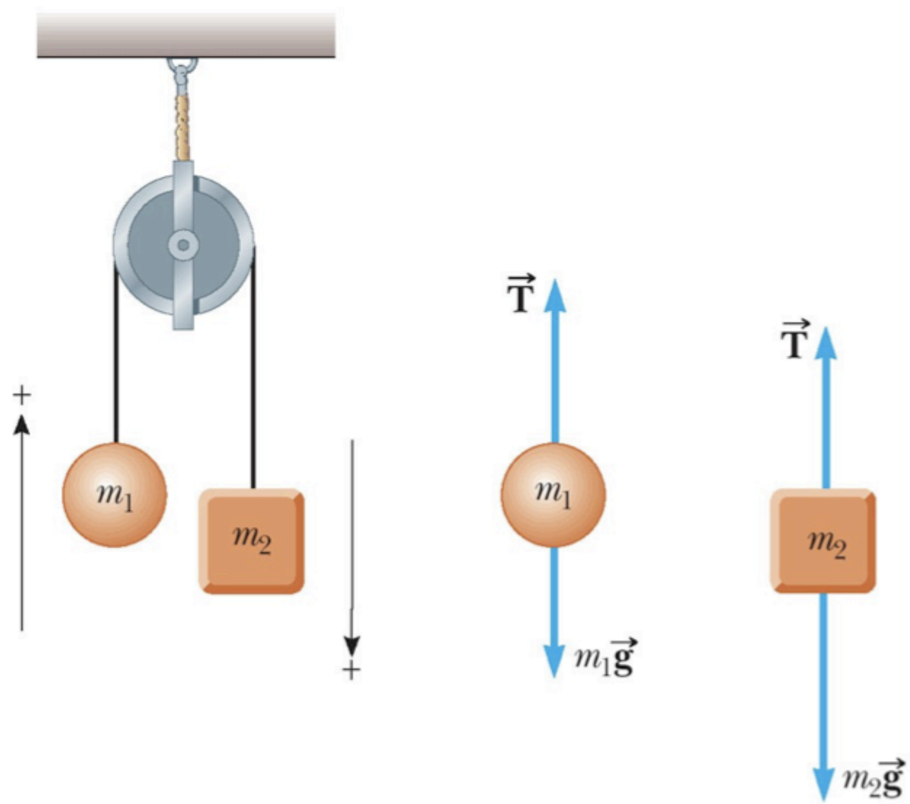


- Soluzione: Disegnare il diagramma di corpo libero, applicare legge di Newton, risolvere per le incognite.

Esempio: macchina di Atwood (2)

- Oggetto 1: $T - m_1 g = m_1 a_y$
- Oggetto 2: $m_2 g - T = m_2 a_y$
- Sommiamo le due equazioni: $-m_1 g + m_2 g = m_1 a_y + m_2 a_y$ da cui

$$a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$



- Sostituendo l'ultima equazione nella prima: $T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$

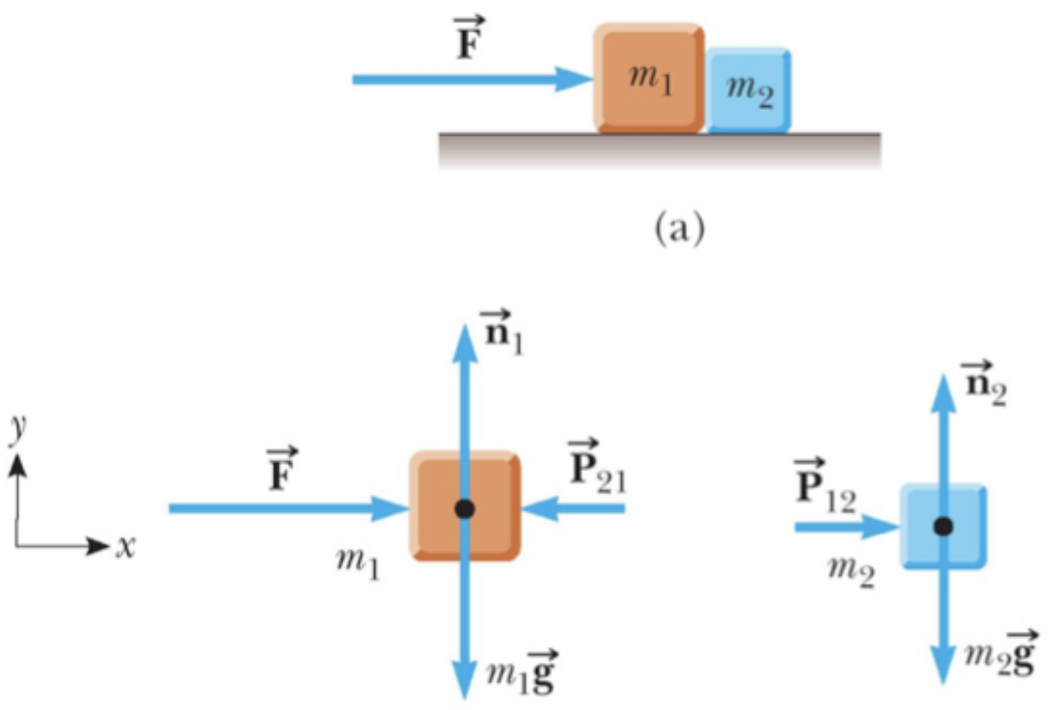
Esempio 2: Oggetti multipli

- Consideriamo per prima cosa il sistema nel suo insieme:

$$\sum F_x = m_{tot} a_x$$

- Applichiamo la Legge di Newton ai singoli blocchi

- Risolviamo le incognite



Verifica: $\vec{P}_{21} = -\vec{P}_{12}$ (è una coppia azione-reazione)

Esempio 2: Oggetti multipli (2)

Per il sistema nel suo insieme:

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

(come per un blocco unico di massa $m_1 + m_2$)

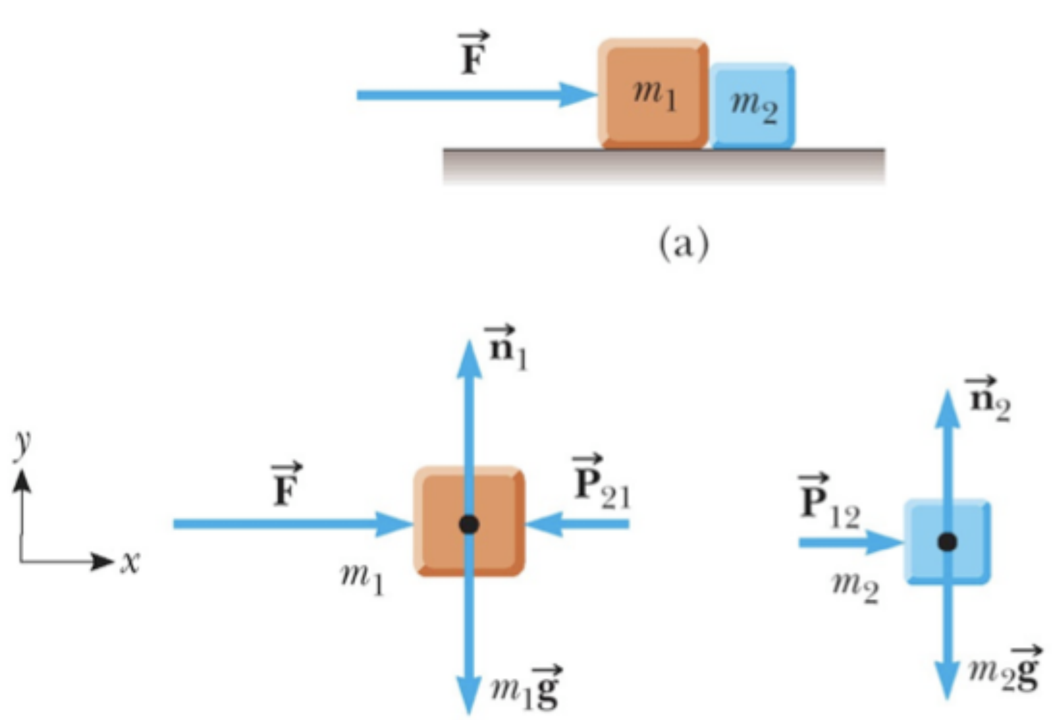
Per il blocco 2: $P_{12} = m_2 a_x$,
da cui

$$P_{12} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F$$

Per il blocco 1:

$$F - P_{21} = m_1 a_x$$

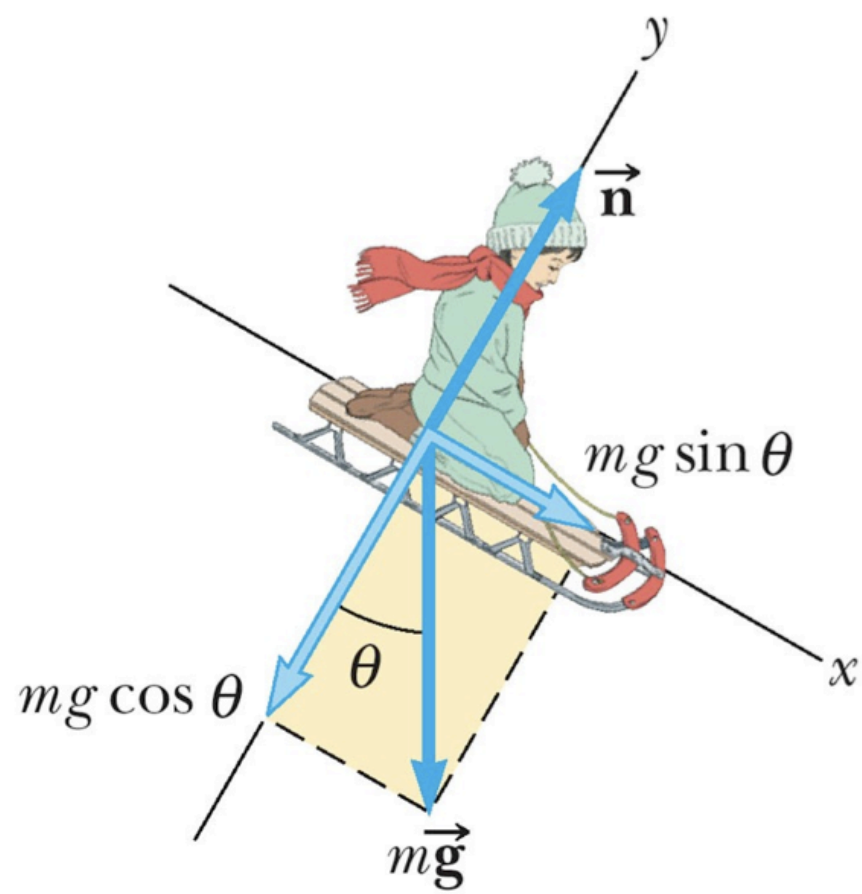
da cui $P_{21} = P_{12}$



Piano inclinato

Forze agenti sull'oggetto:

- La forza normale agisce in direzione *perpendicolare* al piano
- La forza gravitazionale agisce in direzione *verticale*
- Conviene scegliere x lungo il piano inclinato, y perpendicolare al piano, scomporre la forza di gravità in component x e y

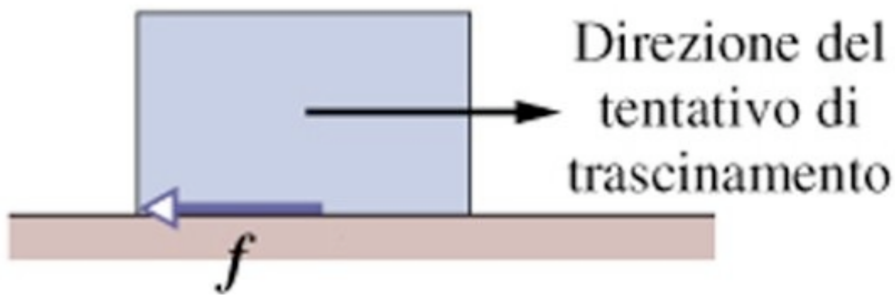


$$n - mg\cos\theta = 0, \qquad mg\sin\theta = ma_x$$

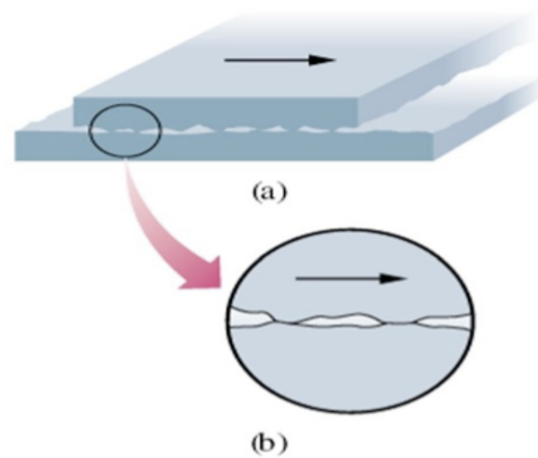
da cui $\boxed{a_x = g\sin\theta}$

Forza di attrito

La presenza delle forze di *attrito* fa parte dell'esperienza quotidiana. Se si tenta di far scorrere un corpo su una superficie, si sviluppa una resistenza allo scorrimento detta *forza di attrito*. Può essere schematizzata come una forza tangente alla superficie.



Da un punto di vista microscopico l'attrito è dovuto alle microfusioni che si formano in corrispondenza delle asperità delle due superfici a contatto

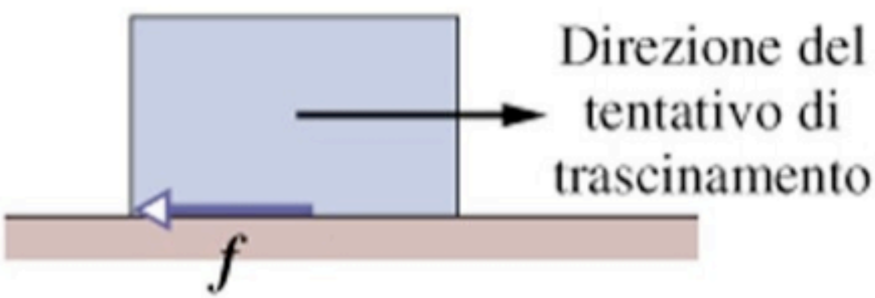


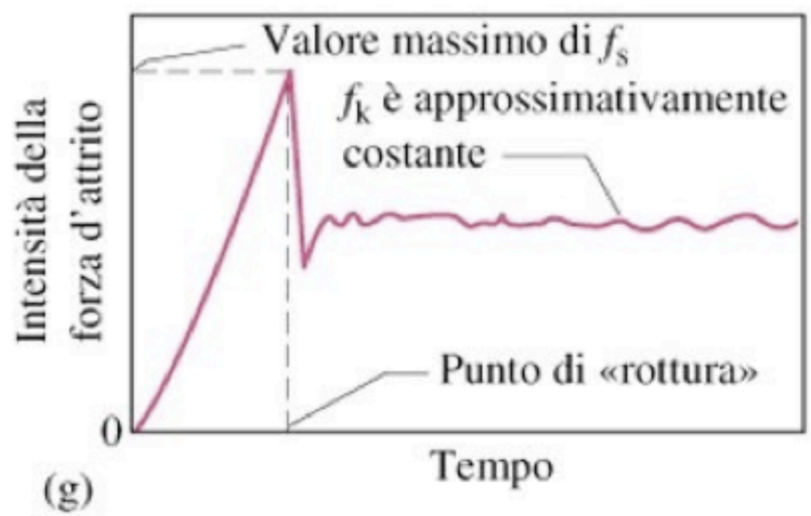
Attrito statico e attrito dinamico

La forza F_s necessaria a rompere le microfusioni e a far iniziare lo scorrimento è responsabile dell'*attrito statico*.

Una volta iniziato, lo scorrimento può essere mantenuto applicando una forza F_d esterna che vinca l'*attrito dinamico*. Di solito, $F_s \geq F_d$.

Il grafico rappresenta l'andamento nel tempo dell'intensità della forza di attrito quando si applica dall'esterno una forza crescente F fino a far muovere il corpo in esame





Modello macroscopico dell'attrito

- La forza di attrito è con buona approssimazione *proporzionale alla reazione vincolare* N esercitata sul corpo:

$$F_s = \mu_s N, \qquad F_d = \mu_d N$$

dove F_s è il valore massimo della forza di attrito statico;
$\mu_s =$ coefficiente di attrito statico;
$\mu_d =$ coefficiente di attrito dinamico.

- μ_s, μ_d sono numeri (adimensionali), $\mu_s, \mu_d < 1$;
dipendono dalle superfici a contatto;
per una data coppia di superfici, $\mu_d < \mu_s$.

Coefficienti d'attrito

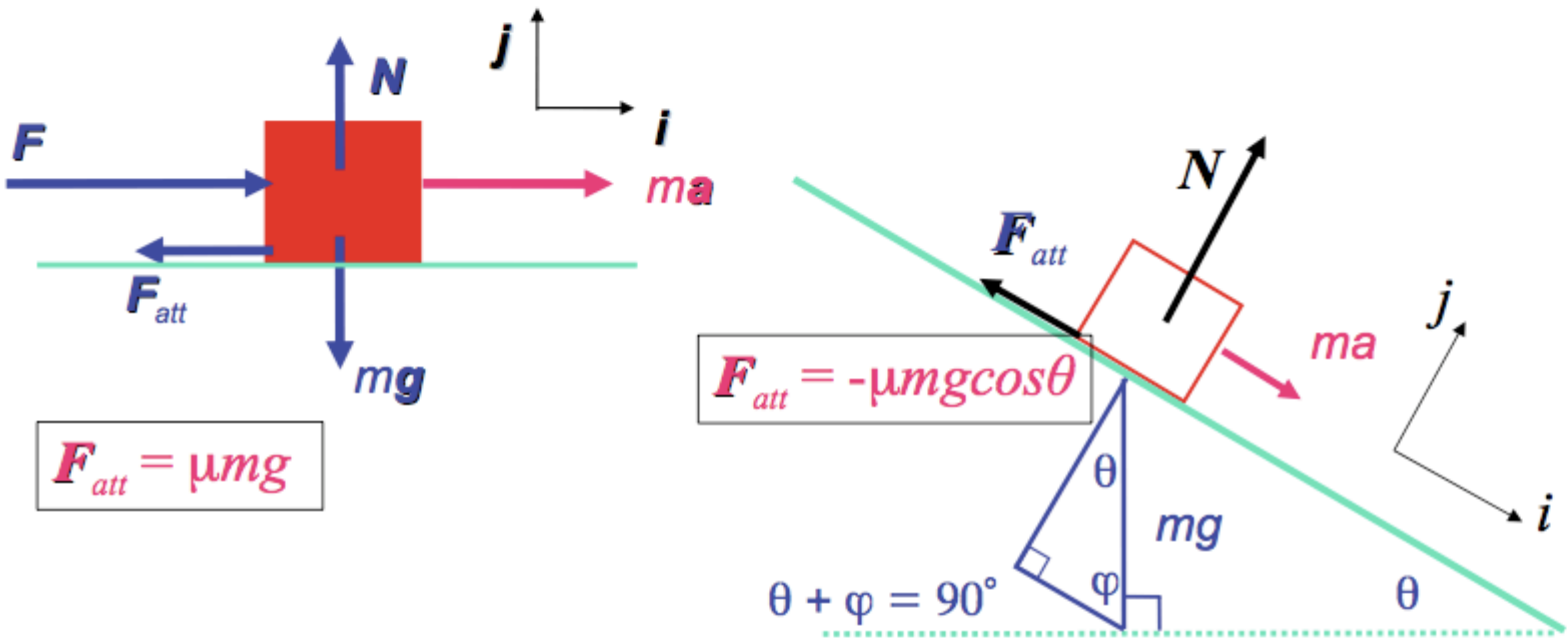
TABLE 5.1 Coefficients of Friction

	μ_s	μ_k
Steel on steel	0.74	0.57
Aluminum on steel	0.61	0.47
Copper on steel	0.53	0.36
Rubber on concrete	1.0	0.8
Wood on wood	0.25–0.5	0.2
Glass on glass	0.94	0.4
Waxed wood on wet snow	0.14	0.1
Waxed wood on dry snow	—	0.04
Metal on metal (lubricated)	0.15	0.06
Ice on ice	0.1	0.03
Teflon on Teflon	0.04	0.04
Synovial joints in humans	0.01	0.003

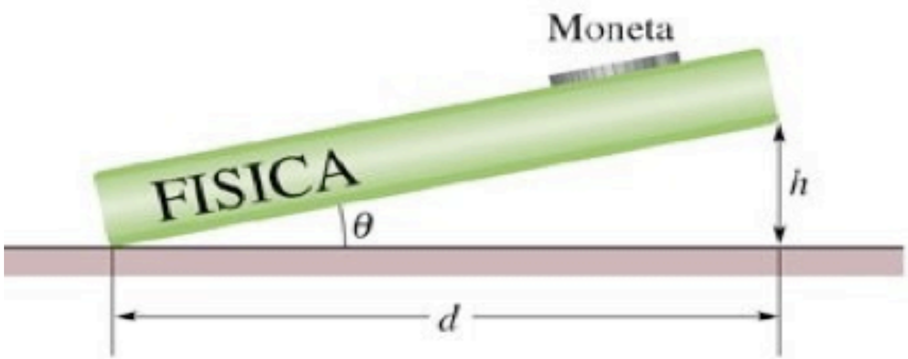
Problemi con Attrito e Legge di Newton

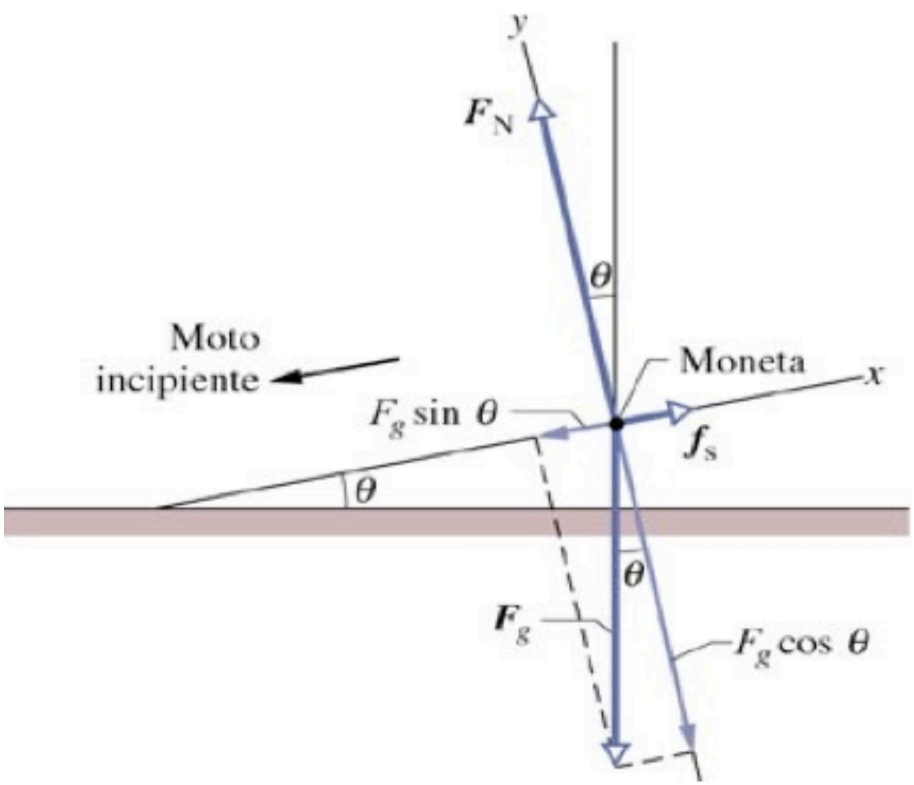
- L'attrito è una forza, quindi va semplicemente inclusa nella somma $\sum \vec{F}$ che appare nella Legge di Newton

- Le regole per l'attrito permettono di determinare la direzione e la grandezza delle forze di attrito



Misura del coefficiente di attrito statico





Quando l'angolo θ raggiunge il valore critico per cui la moneta inizia a muoversi:

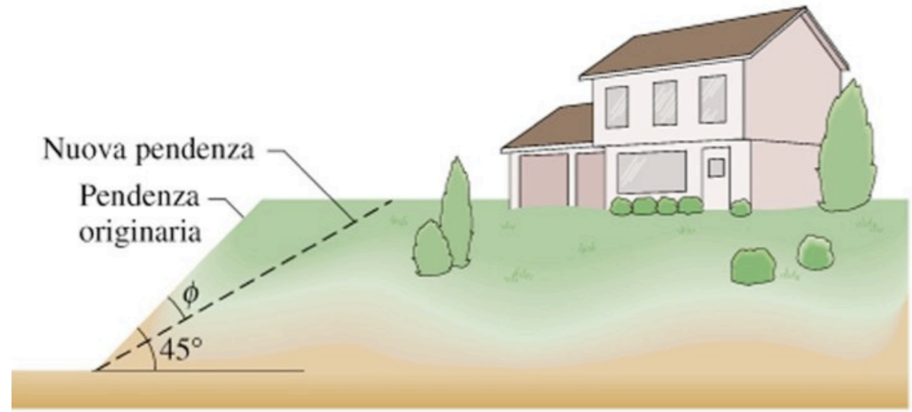
$$mg\sin\theta = F_s = \mu_s mg\cos\theta$$

da cui

$$\mu_s = \tan\theta = \frac{h}{d}$$

Esempio di applicazione

Assumendo $\mu_s = 0.5$ fra due strati di terreno, qual è il minimo angolo ϕ di cui si dovrebbe ridurre la pendenza del terreno per impedirne lo scorrimento?



Soluzione:

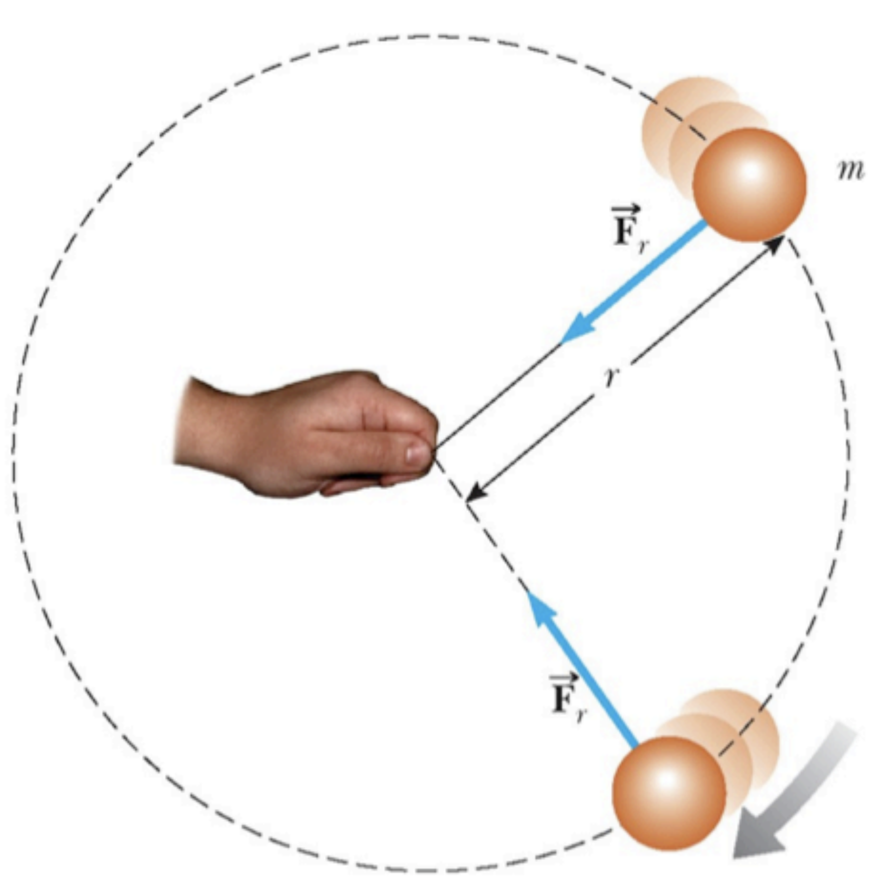
$$\theta = 45^\circ - \phi \leq \arctan 0.5 = 26.6^\circ$$

da cui $\phi \geq 18.4^\circ$

Moto circolare uniforme

- Una forza $\vec{F}_r$ è diretta verso il centro del cerchio
- Questa forza è associata ad un'accelerazione, $\vec{a}_c$
- Applicando la II Legge di Newton lungo la direzione radiale si ottiene:

$$F_r = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

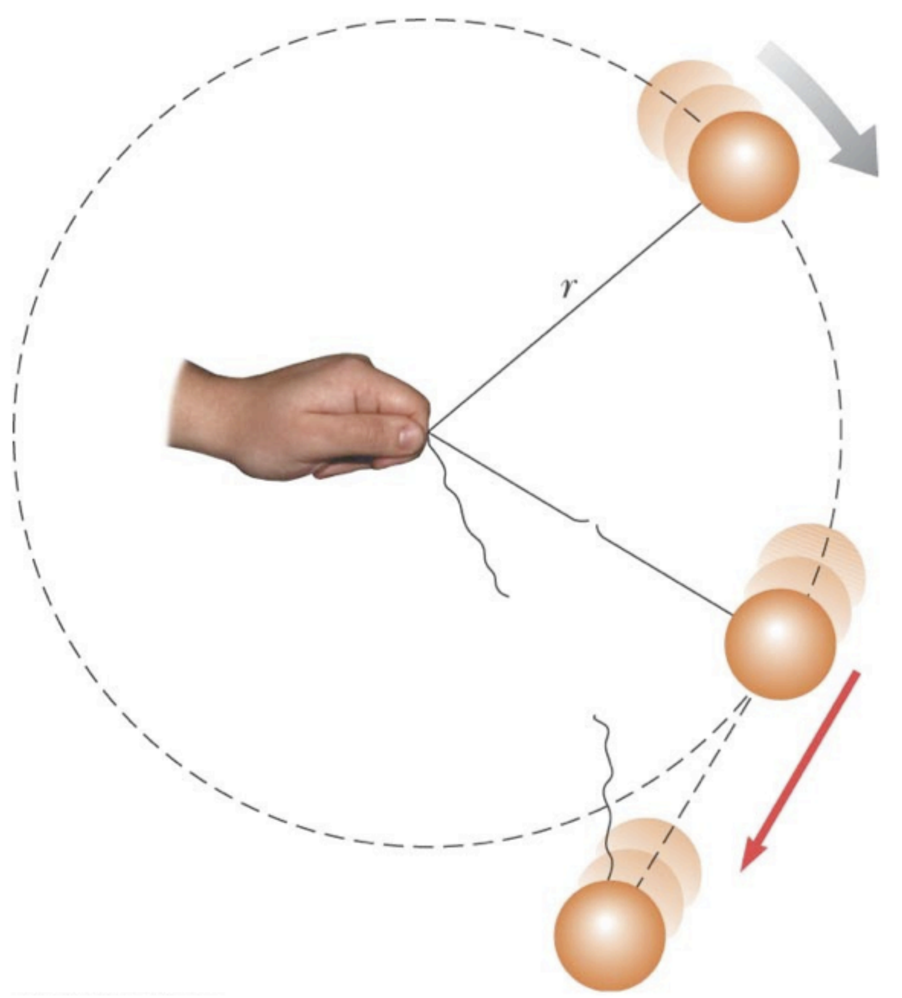


Moto circolare uniforme 2

- Una forza che provoca un'accelerazione centripeta (*forza centripeta*) agisce nella direzione del centro del cerchio

- Questa forza produce un cambiamento nella direzione del vettore velocità e *un moto circolare*

- Se tale forza sparisce, l'oggetto si muove con moto uniforme nella direzione tangente al cerchio



La forza centripeta *non* è un nuovo tipo di forza: è una forza come le altre, che ha come effetto un moto circolare.

Moto di un'automobile

- La forza che accelera un'automobile è la *forza di attrito* dal suolo!
- Il motore applica una forza sulle ruote
- Il fondo delle ruote applica forze in direzione contraria al moto sulla superfice stradale, mentre la reazione (della strada sulle ruote) produce il moto in avanti dell'automobile

...e in curva?

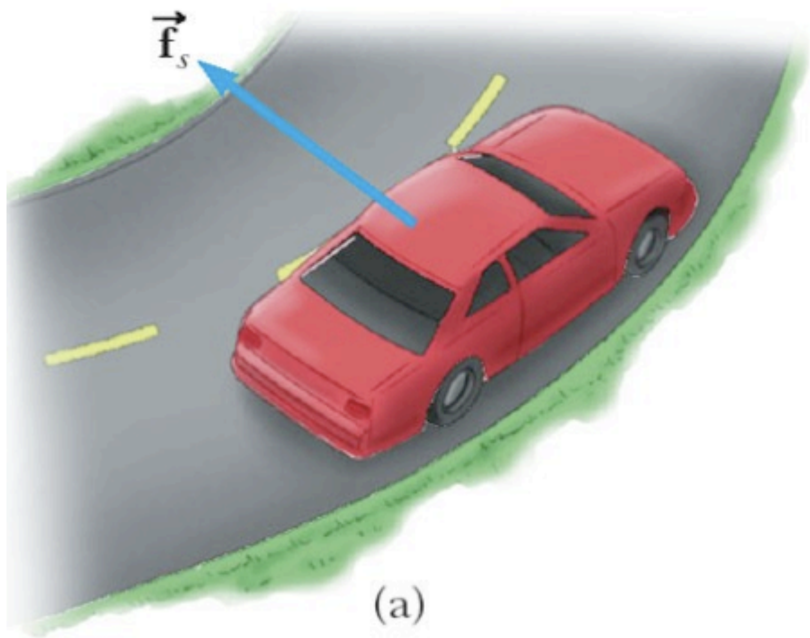
Curva orizzontale (piatta)

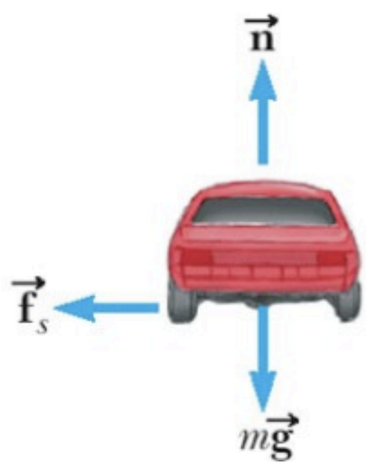
- La forza centripeta à data da una forza di *attrito statico*!

- La velocità massima alla quale l'automobile può affrontare la curva è data da

$$\frac{mv^2}{r} \leq \mu_s mg \rightarrow v \leq \sqrt{\mu_s g r}$$

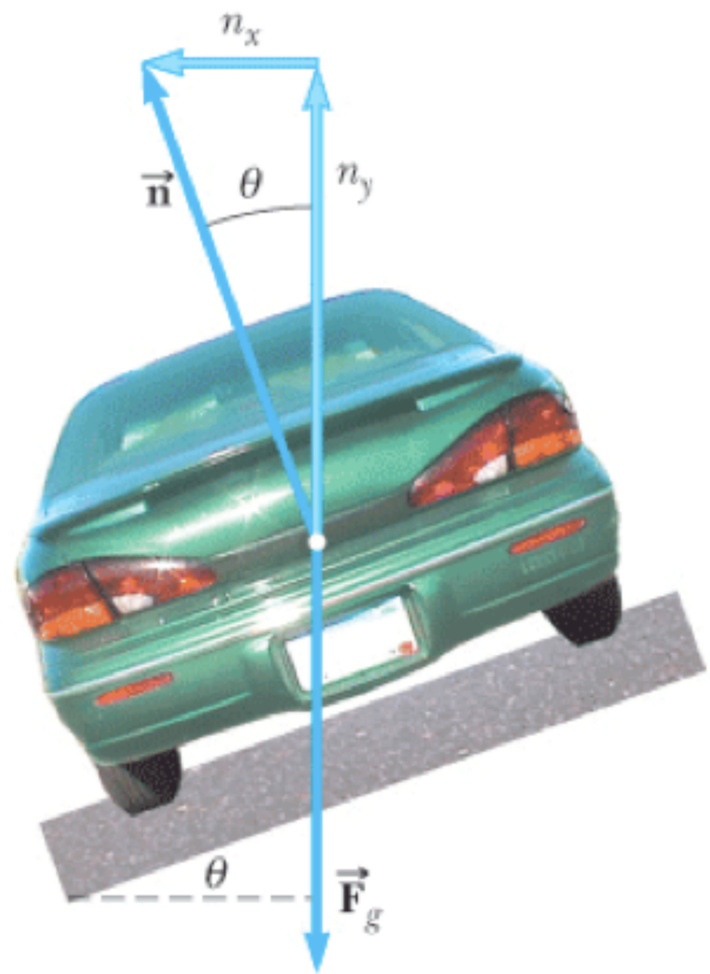
- Notare come questa non dipenda dalla massa dell'automobile.





Curva sopraelevata

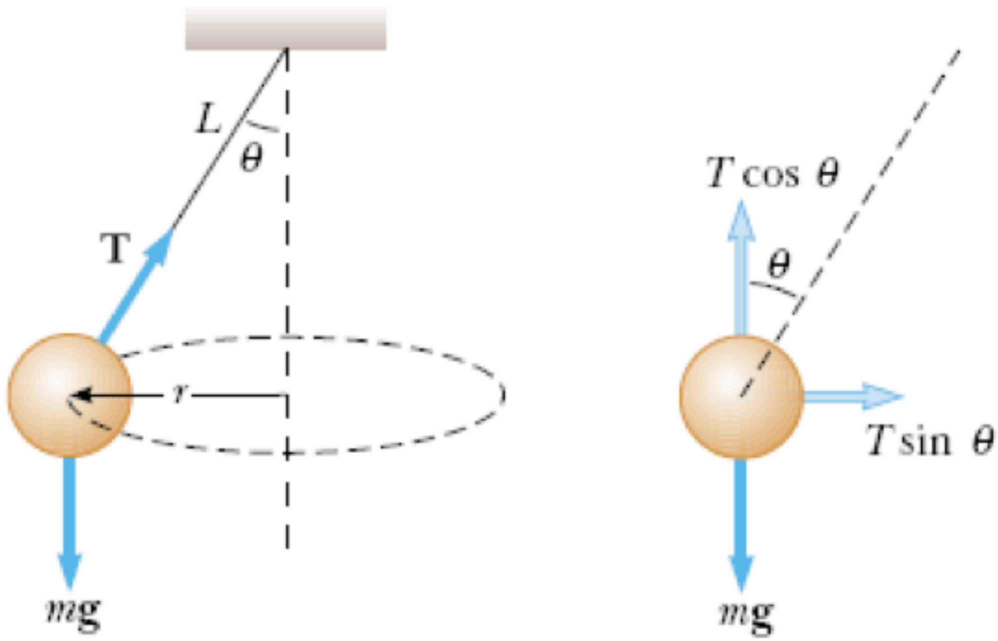
Per quale valore di θ i passeggeri non risentono forze laterale? ciò avviene quando la forza centripeta à interamente data dalla componente orizzontale n_x della reazione vincolare della strada $\vec{n}$:



$$
\begin{aligned}
n_y &= n\cos\theta = mg, \\
n_x &= n\sin\theta = \frac{mv^2}{r}
\end{aligned}
$$

Da qui si ricava $\tan\theta = \dfrac{v^2}{rg}$. Notare la direzione della forza centripeta: è orizzontale, non parallela al piano inclinato!

Pendolo Conico



$$T\cos\theta = mg, \quad T\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

Dividiamo la seconda relazione per la prima:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}, \qquad v = \sqrt{rg\tan\theta} = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$$

Moto in un fluido

- Un fluido (liquido o gas) esercita una *forza di resistenza*, $\vec{R}$, su di un oggetto che si muove in esso. La direzione di $\vec{R}$ e' opposta alla direzione $\vec{v}$ del moto dell'oggetto relativo al fluido.

- Il modulo di $\vec{R}$ dipende dal fluido e dalla forma dell'oggetto

- Il modulo di $\vec{R}$ *dipende dalla velocità dell'oggetto* in modo complicato: in generale, aumenta per v crescente.

- Caso semplice: R proporzionale a v, ovvero $\boxed{\vec{R} = -b\vec{v}}$.
  E' una buona approssimazione per moto lento o per oggetti piccoli. Basata su di un modello in cui la resistenza è proporzionale al numero di collisioni con gli atomi del fluido, che a sua volta è proporzionale a v.

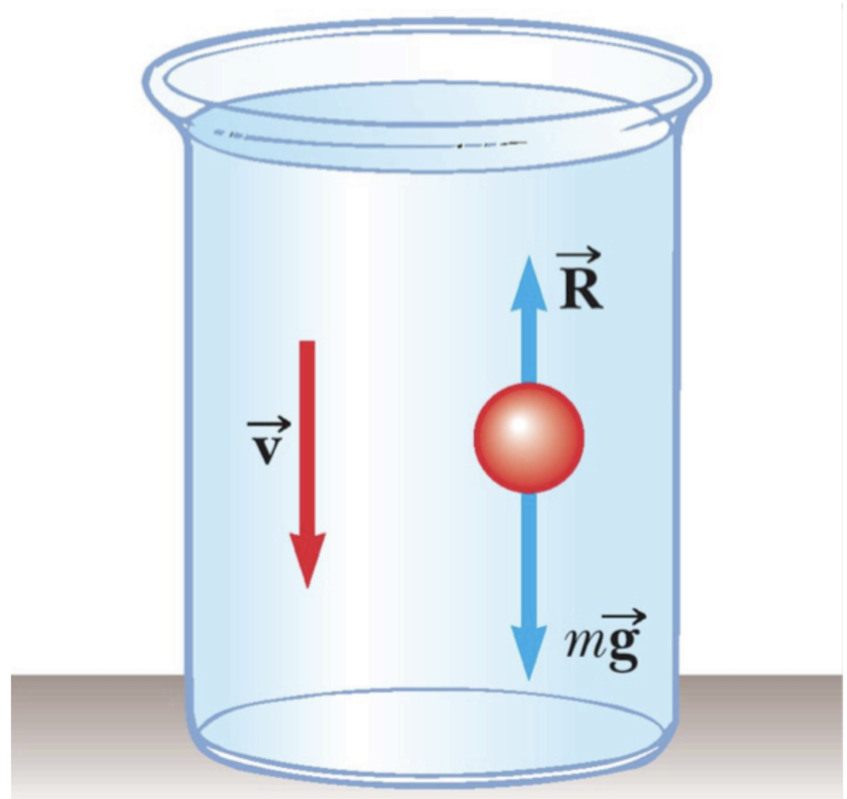
Moto in un fluido, esempio

Caduta di un grave in un fluido, con resistenza proporzionale alla velocità:

$$mg - bv = ma$$

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$

Si tratta di un'equazione *differenziale*.



La velocità tende ad un valore finito v_l (*velocità limite*), tale per cui la resistenza uguaglia la forza peso:

$$mg - bv_l = 0 \quad \longrightarrow \quad v_l = \frac{mg}{b}$$

Moto in un fluido, soluzione

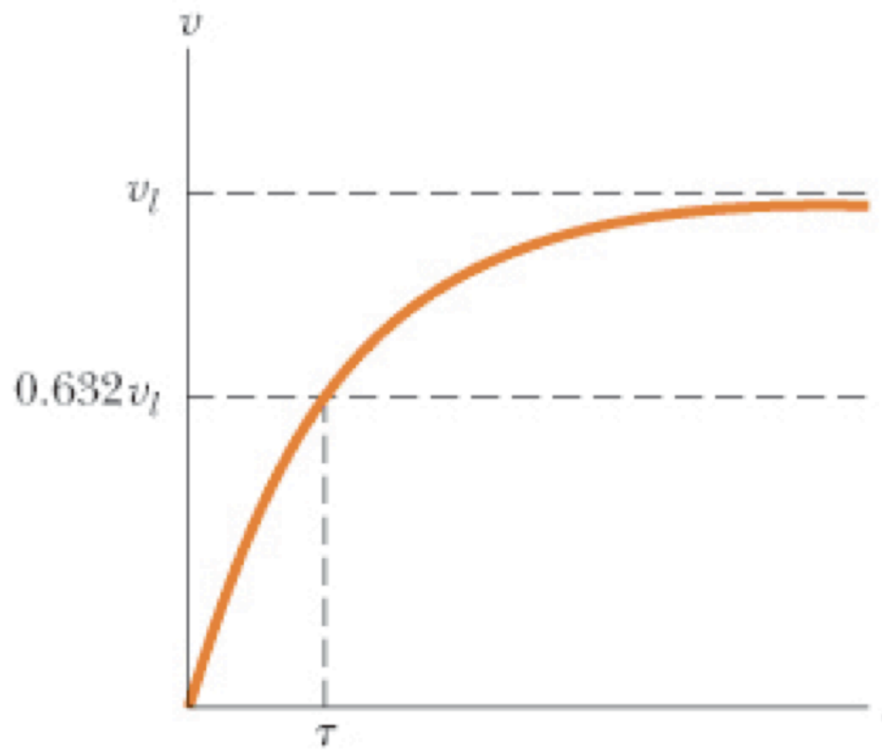
La soluzione dell'equazione differenziale $a = \dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{b}{m}v$ con la condizione $v(t=0)=0$, ha la forma seguente:

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)$$

che possiamo riscrivere come

$$v(t) = v_l\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

dove $\tau = b/m$ (*costante di tempo*) ci dà l'ordine di grandezza del tempo necessario per arrivare alla velocità limite.



Esercizio

Quanto tempo impiega una massa di 1 kg a percorrere la distanza di 10 m, partendo da ferma, lungo un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale in assenza di attriti ? Con che velocità arriva in fondo ?

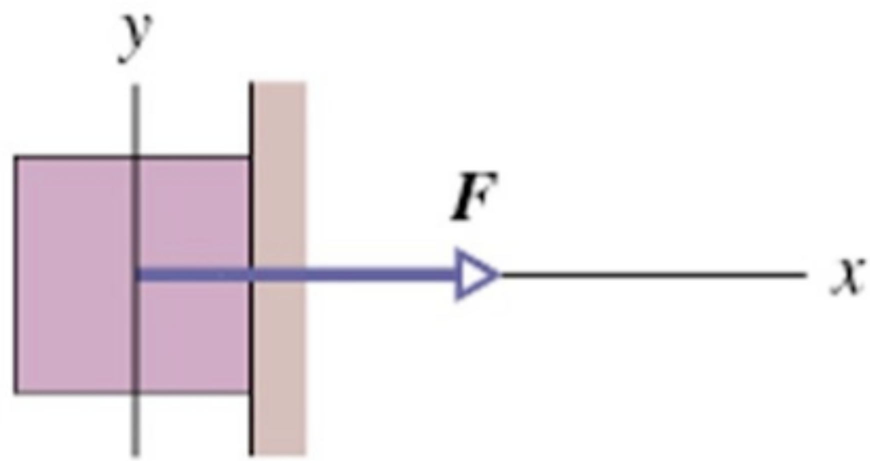
Esercizio

Quanto tempo impiega una massa di 1 kg a percorrere la distanza di 10 m, partendo da ferma, lungo un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale in assenza di attriti ? Con che velocità arriva in fondo ?

Soluzione:
La massa subisce un'accelerazione costante $a = g \sin 30^\circ = 4.905$ *m/s*^{2}*, seguendo una leggee oraria* $x(t) = at^2/2$*. Per percorrere* $d = 10$ *m impiega quindi* $t = \sqrt{2d/a} = 2.02$ *s. La sua velocità è data da* $v(t) = at$*, ovvero* $v = 9.9$ *m/s dopo 10 m. In generale, dopo aver percorso* d*, la sua velocità vale* $v = \sqrt{2ad}$*.*

Esercizio

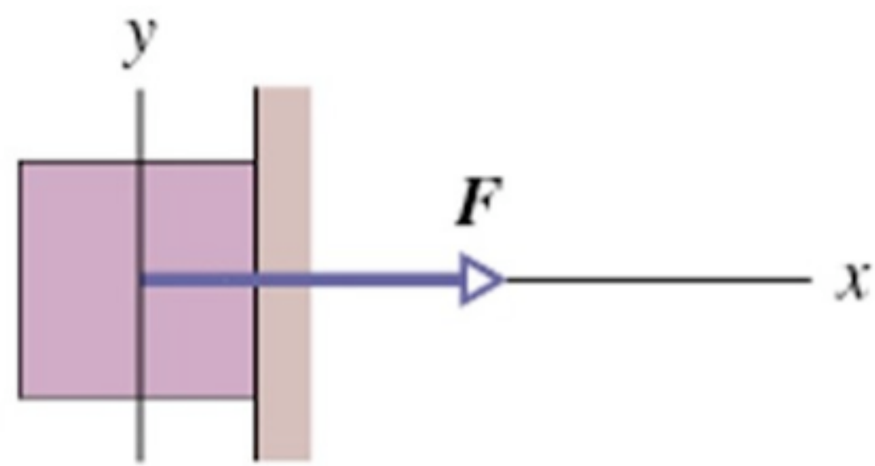
Una forza $F = 12$ N spinge un blocco di peso $P = 5$ N contro la parete. Coefficienti di attrito $\mu_s = 0.6$, $\mu_d = 0.4$.



- Il blocco (inizialmente fermo) si muove?
- Esprimere la forza totale esercitata dalla parete sul blocco.

Esercizio

Una forza $F = 12$ N spinge un blocco di peso $P = 5$ N contro la parete. Coefficienti di attrito $\mu_s = 0.6$, $\mu_d = 0.4$.



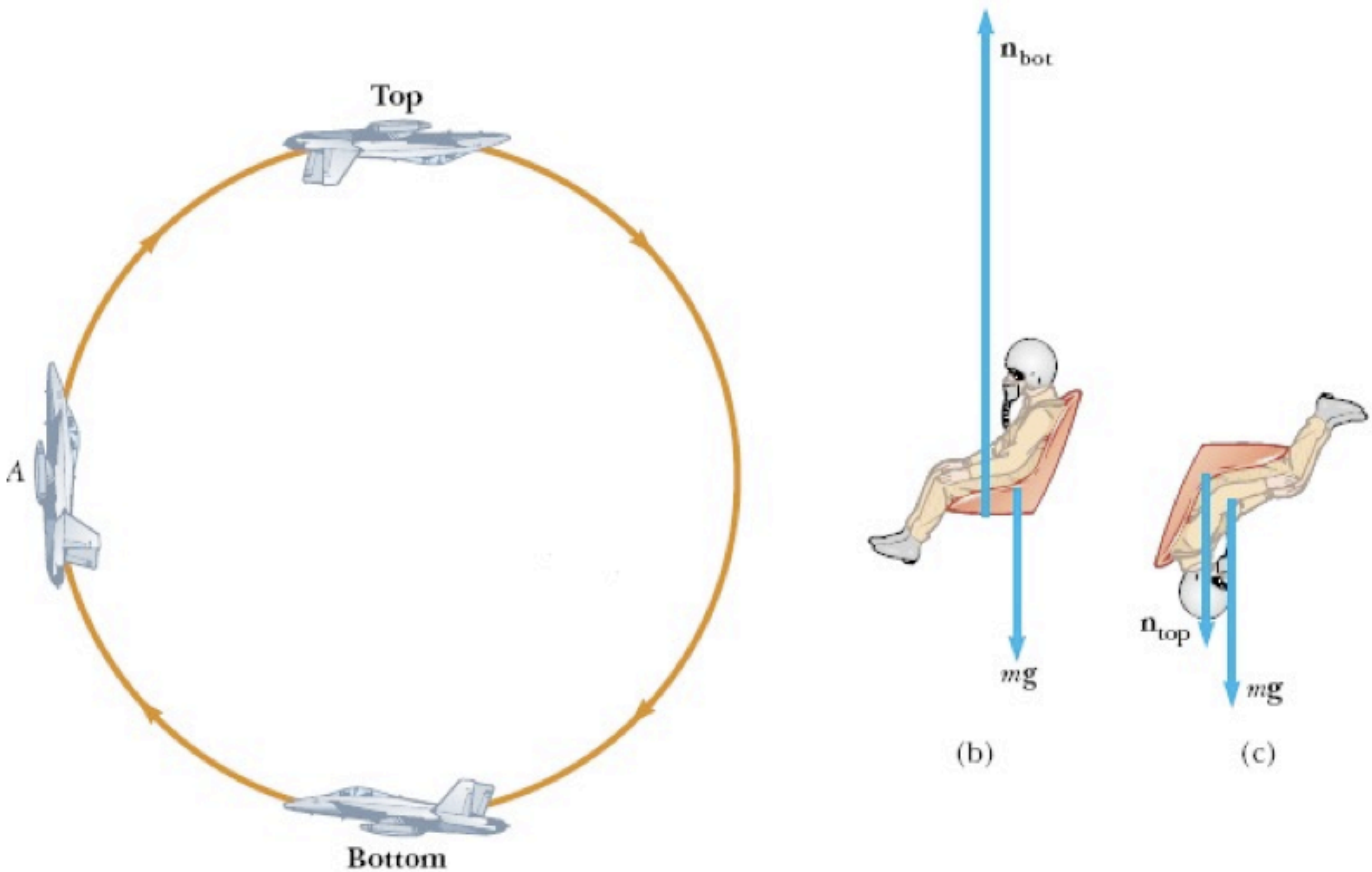
- Il blocco (inizialmente fermo) si muove?

- Esprimere la forza totale esercitata dalla parete sul blocco.

Soluzione:
Il blocco non si muove: la reazione vincolare della parete vale -12 N lungo l'asse x; la forza di attrito statico $F\mu_s \leq 12 \cdot 0.6N = 7.2N > P$. Lungo l'asse y, la forza di attrito F_s uguaglia la forza peso: $F_y = +5$ N

Giro della morte

Qual è la forza esercitata dal seggiolino sul pilota nel punto più basso e nel punto più alto del giro (in unità di mg del pilota)? Si assuma che la velocità v resti costante per tutto il giro.



Giro della morte II

Nei due punti, *bot* e *top*:

$$
\begin{aligned}
n_{bot} - mg &= \frac{mv^2}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{n_{bot}}{mg} = \frac{v^2}{gr} + 1 \\
n_{top} + mg &= \frac{mv^2}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{n_{top}}{mg} = \frac{v^2}{gr} - 1
\end{aligned}
$$

Dati: $v = 225$ m/s, $r = 2.7$ km, $\dfrac{v^2}{gr} = 1.91$, da cui:
$n_{bot} = 2.91mg$, $n_{top} = 0.91mg$.